

## 04 – La fonction exponentielle – exercices

### Exercice 1

L'objectif de cet exercice est de montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

1. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = e^x - x$ .
  - a. En étudiant les variations de  $\varphi$ , montrer que  $\varphi$  est croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .
  - b. En déduire que pour tout réel  $x$  positif  $e^x \geq x$ .
  - c. Conclure
2. En posant  $X = -x$ , montrer alors que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

### Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$e^{-x+7} = e^{x+3} \qquad e^{-x} - e^x < 0 \qquad e^{-x+3} \geq \frac{1}{e^x} \qquad e^{-5x} = -1 \qquad e^{3x+1} - 1 \leq 0$$

$$e^{2x} - e^x - 2 = 0 \qquad e^{2x} + 2e^x < 3$$

(Aide : Poser  $X = e^x$  pour se ramener à une (in)équation du second degré. On admettra que pour  $a > 0$ ,  $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$ )

### Exercice 3

Déterminer les limites demandées

1.  $f(x) = e^{-x}$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
2.  $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
3.  $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x-1}$  en  $+\infty$  et en 0.
4.  $f(x) = e^x - x + 1$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
5.  $f(x) = \frac{e^{3x}-1}{x}$  en 0.

### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ .
2. Etudier les limites de  $f$  aux bornes ouvertes de  $\mathcal{D}_f$ .
3. Etudier le sens et le tableau de variation de  $f$ .

### Exercice 5 (d'après France, septembre 2005)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = (20x+10)e^{-\frac{x}{2}}$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

1. Etudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 10$  admet une unique solution strictement positive  $\alpha$  dans  $]0 ; +\infty[$  et donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $\alpha$ .
4. Tracer  $\mathcal{C}$ .

### Exercice 6 (D'après Batterie Nationale)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2,1e^x + 1,1x + 1,6$ .

1. Faire apparaître sur votre calculatrice graphique la courbe représentative de  $f$  dans la fenêtre  $-5 \leq x \leq 4$  et  $-4 \leq y \leq 4$ .
2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :
  - a. Sur les variations de la fonction  $f$ .
  - b. Sur le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .
3. On se propose d'étudier la fonction  $f$ .
  - a. Déterminer le signe de  $e^{2x} - 2,1e^x + 1,1$  en fonction des valeurs de  $x$ .
  - b. Déterminer les limites de  $f$  en l'infini.
  - c. Etudier le sens de variations de  $f$ .
  - d. Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .
4. On souhaite représenter sur une calculatrice, la courbe représentative de  $f$  sur  $[-0,05 ; 0,15]$  de façon à visualiser les résultats de la question 3.  
Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée  $y$  peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?

### Exercice 7

Résoudre les équations et systèmes suivants :

$$y' = 3y \quad \frac{3}{4}y' + y = 0 \quad \begin{cases} 5y' - 2y = 0 \\ y(5) = e \end{cases}$$

### Exercice 8

- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle (E) :  $-2y' + 5 = 4y$ .
- Etudier les fonctions solutions.
- Représenter les courbes représentatives de quelques fonctions solutions sur votre calculatrice graphique.

### Exercice 9 :

Une société produit des jambons industriels. Les jambons sont d'abord moulés, puis cuits à température constante par convection. Chaque jambon est moulé à  $T_0 = 10^\circ\text{C}$  avant d'être introduit dans un four maintenu à température constante de  $75^\circ\text{C}$ . La température  $T(t)$  (en  $^\circ\text{C}$ ) au cœur du jambon vérifie à chaque instant  $t$  ( $t \geq 0$  exprimé en heures) l'équation  $\frac{dT}{dt} + KT = 75K$ ,  $K$  étant une constante positive dépendant des conditions de cuisson.

- Déterminer  $T$  en fonction de  $t$ .
- Au bout de 9 heures, la température à cœur atteint  $69^\circ\text{C}$ . Déterminer la valeur de la constante  $K$ .
- Etudier la fonction  $t \mapsto T(t)$  sur l'intervalle  $[1 ; 15]$  et tracer la courbe représentative de cette fonction.

### Exercice 10 :

On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + y = 2(x+1)e^{-x}$ .

- Démontrer que la fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$  est solution de (E).
- Résoudre l'équation différentielle ( $E_0$ ) :  $y' + y = 0$ .
- Démontrer qu'une fonction  $v$  définie sur  $\mathbb{R}$  est solution de (E) si et seulement si  $v - u$  est solution de ( $E_0$ ).
- En déduire les solutions de (E).
- Déterminer la fonction  $f$ , solution de (E), prenant la valeur 1 en 0.

### Exercice 11 : Propagation d'une rumeur

Une ville compte 10 000 habitants. A 8h du matin, 100 personnes apprennent une nouvelle. On note  $f(t)$  la fréquence des personnes connaissant la rumeur à l'instant  $t$  (exprimé en heures).

On choisit 8h comme instant initial  $t = 0$ .

La nouvelle se répand dans la ville de sorte que la vitesse de propagation  $f'(t)$  est proportionnelle au produit de la fréquence de ceux qui connaissent la nouvelle et de la fréquence de ceux qui ne la connaissent pas.

On admet que le coefficient de proportionnalité est 1,15.

- Montrer que la fonction  $f$  est la solution du système :  $\begin{cases} y' = 1,15y(1-y) \\ y(0) = 0,01 \end{cases}$ .
- Démontrer que  $g = \frac{1}{f}$  est solution de l'équation différentielle ( $E_1$ ) :  $y' = -1,15y + 1,15$ .
- En déduire l'expression de  $g(t)$  puis de  $f(t)$ .
- Etudier le sens de variation de la fonction  $f$ . Quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$  ?
- Combien de personnes connaissent la nouvelle à midi ?
- En utilisant une calculatrice, donner une approximation de l'instant auquel 99% de la population connaîtra la rumeur.

### Exercice 12 : (France juin 2005)

#### Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$ .

- Démontrer que  $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$ .
- Etudier les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- Etudier les variations de la fonction  $f$ .

**Partie B**

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps  $t$ , est notée  $g(t)$ . On définit ainsi une fonction  $g$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ . La variable réelle  $t$  désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour  $g(t)$  est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour  $g$  une solution, sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , de l'équation différentielle  $(E_1) : y' = \frac{y}{4}$ .
- (a) Résoudre l'équation différentielle  $(E_1)$ .
  - (b) Déterminer l'expression de  $g(t)$  lorsque, à la date  $t = 0$ , la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire  $g(0) = 1$ .
  - (c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?
2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note  $u(t)$  le nombre des rongeurs vivants au temps  $t$  (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction  $u$ , ainsi définie, satisfait aux conditions :  $(E_2) \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$  pour tout nombre réel  $t$  positif ou nul, où  $u'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $u$ .
- (a) On suppose que, pour tout réel positif  $t$ , on a  $u(t) > 0$ . On considère, sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , la fonction  $h$  définie par  $h = \frac{1}{u}$ . Démontrer que la fonction  $u$  satisfait aux conditions  $(E_2)$  si et seulement si la fonction  $h$  satisfait aux conditions  $(E_3) \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$  pour tout nombre réel  $t$  positif ou nul, où  $h'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $h$ .
  - (b) Donner les solutions de l'équation différentielle  $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$  et en déduire l'expression de la fonction  $h$ , puis celle de la fonction  $u$ .
  - (c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  ?

**Exercice 8 : éléments de correction**

(a)  $-2y' + 5 = 4y \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y' = -2y + \frac{5}{2}$  donc les expressions algébriques des fonctions solutions de  $(E_1)$

sont du type  $f_A(x) = Ae^{-2x} - \frac{5}{-2}$  cad  $f_A(x) = Ae^{-2x} + \frac{5}{4}$  avec  $A \in \mathbb{R}$ .

(b) Les fonctions  $f_A$  sont définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'_A(x) = -2Ae^{-2x}$ .

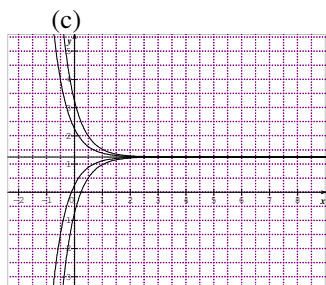
Or  $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-2x} > 0$  donc  $-2e^{-2x} < 0$ . Ainsi  $f'_A(x)$  dépend du signe de  $A$ .

Si  $A > 0$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f'$		-
$f$	$+\infty$	$\frac{5}{4}$

Si  $A < 0$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f'$		+
$f$	$-\infty$	$\frac{5}{4}$



(d)  $A(-1; 0) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow f(-1) = 0 \Leftrightarrow Ae^{-2 \times (-1)} + \frac{5}{4}$

$= 0 \Leftrightarrow A = -\frac{5}{4} \times e^{-2}$ . Donc la fonction solution

dont la courbe passe par le point  $A$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  ayant pour expression algébrique

$$f(x) = -\frac{5}{4}e^{-2x-2} + \frac{5}{4}$$